I. — 1° *a*)

$$x_1 \in \mathfrak{R}(\Sigma) \Longleftrightarrow \exists z_1 \in \Sigma \quad \text{et} \quad y_1 \in E : \ z_1 = x_1 + iy_1$$

et

$$x_2 \in \mathfrak{R}(\Sigma) \Longleftrightarrow \exists z_2 \in \Sigma \quad \text{et} \quad y_2 \in E : \ z_2 = x_2 + iy_2;$$
$$\forall \lambda \quad \text{et} \quad \forall \mu \in E, \qquad \lambda z_1 + \mu z_2 = \lambda x_1 + \mu x_2 + i(\lambda y_1 + \mu y_2) \in \Sigma,$$
$$\lambda x_1 + \mu x_2 \in E \quad \text{et} \quad \lambda y_1 + \mu y_2 \in E.$$

$\mathfrak{R}(\Sigma)$ est un sous-espace vectoriel; la même démonstration s'applique à $\mathfrak{J}(\Sigma)$, qui est aussi un sous-espace. $\mathfrak{R}(\Sigma)$ et $\mathfrak{J}(\Sigma)$ sont un même sous-espace $l(\Sigma)$. — Puisque l'on a

$$y \in \mathfrak{J}(\Sigma) \Longrightarrow \exists z \in \Sigma \quad \text{et} \quad x \in E \quad \text{tels que} \quad z = x + iy \in \Sigma \quad \text{et} \quad -iz = y - ix \in \Sigma.$$
$$y \in \mathfrak{J}(\Sigma) \Longrightarrow y \in \mathfrak{R}(\Sigma), \qquad \mathfrak{J}(\Sigma) \subset \mathfrak{R}(\Sigma), \qquad \text{de même} \qquad \mathfrak{R}(\Sigma) \subset \mathfrak{J}(\Sigma),$$

donc

$$\mathfrak{R}(\Sigma) = \mathfrak{J}(\Sigma) = l(\Sigma).$$

b) Soit H un sous-espace vectoriel de E; examinons $l[c(H)]$. Par définition,

$$x \in H \quad \text{et} \quad y \in H \Longrightarrow z = x + iy \in c(H) \Longrightarrow x \quad \text{et} \quad y \in l[c(H)],$$

on a donc $H \subset l[c(H)]$; mais $l[c(H)] = \mathfrak{R}[c(H)]$, on peut alors écrire

$$x \in \mathfrak{R}[c(H)] \Longrightarrow z = x + iy \in c(H),$$

donc

$$x \in H \quad \text{et} \quad l[c(H)] \subset H;$$

on en déduit donc

$$H = l[c(H)].$$

2° *a*) Étude de $\Sigma \cap E$. — L'intersection de Σ et de E est donc une partie de E.

$$\forall x, \ y \in \Sigma \cap E \quad \text{et} \quad \forall \lambda, \ \mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in \Sigma \quad \text{et} \quad \lambda x + \mu y \in E,$$

d'où l'on déduit que

$$\lambda x + \mu y \in \Sigma \cap E \Longrightarrow \Sigma \cap E \ \text{ est un espace vectoriel.}$$

Comparaison de $c(\Sigma \cap E)$ et de $\Sigma \cap \overline{\Sigma}$.

$$\forall z \in c(\Sigma \cap E), \qquad \mathfrak{R}(z) = x \in \Sigma \cap E \quad \text{et} \quad \mathfrak{J}(z) = y \in \Sigma \cap E;$$
$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \bar{z} = x - iy,$$

$\Sigma \cap E$ est un sous-espace vectoriel de Σ entraîne que $iy \in \Sigma$ et $-iy \in \Sigma$, d'où

$$z = x + iy \in \Sigma \quad \text{et} \quad \bar{z} = x - iy \in \Sigma \Longleftrightarrow \overline{(\bar{z})} = z \in \overline{\Sigma};$$

donc

$$z \in \overline{\Sigma} \Longrightarrow z \in \Sigma \cap \overline{\Sigma} \Longrightarrow c(\Sigma \cap E) \subset \Sigma \cap \overline{\Sigma}.$$

Réciproquement,

$$\forall z \in \Sigma \cap \overline{\Sigma} \Longrightarrow z \in \Sigma \quad \text{et} \quad z \in \overline{\Sigma} \Longrightarrow z \in \Sigma \quad \text{et} \quad \bar{z} \in \Sigma$$
$$\Longrightarrow \frac{z + \bar{z}}{2} = \mathfrak{R}(z) \in \Sigma \quad \text{et} \quad -i\frac{z - \bar{z}}{2} = \mathfrak{J}(z) \in \Sigma.$$

Or,

$$\mathfrak{R}(z) \in E \quad \text{et} \quad \mathfrak{J}(z) \in E, \quad \text{donc} \quad \mathfrak{R}(z) \in \Sigma \cap E \quad \text{et} \quad \mathfrak{J}(z) \in \Sigma \cap E.$$
$$\Sigma \cap \overline{\Sigma} \subset c(\Sigma \cap E), \qquad \text{d'où} \qquad \Sigma \cap \overline{\Sigma} = c(\Sigma \cap E).$$

b) Établissons la formule $\Sigma + \overline{\Sigma} = c[l(\Sigma)]$.

$$z = x + iy \in \Sigma \Longrightarrow x \quad \text{et} \quad y \in l(\Sigma) \Longrightarrow \bar{z} = x - iy \in c[l(\Sigma)].$$

$c[l(\Sigma)]$ est donc un espace vectoriel et, $\Sigma \subset c[l(\Sigma)]$ et $\overline{\Sigma} \subset c[l(\Sigma)]$ entraîne $\overline{\Sigma} + \overline{\Sigma} \subset c[l(\Sigma)]$

Réciproquement,

$$\forall z \in c[l(\Sigma)] \Longrightarrow x \in l(\Sigma), \qquad y \in l(\Sigma) \quad \text{et} \quad z = x + iy.$$
$$x \in l(\Sigma) = \mathfrak{R}(\Sigma) \Longleftrightarrow \exists z_1 \in \Sigma \quad \text{et} \quad x = \mathfrak{R}(z_1) = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}$$

et

$$y \in l(\Sigma) = \mathfrak{J}(\Sigma) \Longleftrightarrow \exists z_2 \in \Sigma \quad \text{et} \quad y = \mathfrak{J}(z_2) = -i\frac{z_2 - \bar{z}_2}{2};$$

on a donc

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 \text{ et } z_2 \in \Sigma \Longrightarrow \dfrac{z_1 + z_2}{2} \in \Sigma \\ \bar{z}_1 \text{ et } \bar{z}_2 \in \overline{\Sigma} \Longrightarrow \dfrac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{2} \in \overline{\Sigma} \end{array}\right\} \Longrightarrow z \in \Sigma + \overline{\Sigma} \Longrightarrow c[l(\Sigma)] \subset \Sigma + \overline{\Sigma}',$$

donc

$$\Sigma + \overline{\Sigma}' = c[l(\Sigma)].$$

c) Un sous-espace Σ de $c(\mathrm{E})$ est un complexifié. — Par définition, il existe

$$\mathrm{H} \subset \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \Sigma = c(\mathrm{H}).$$
$$\forall z \in \Sigma, \quad \exists x,\, y \in \mathrm{H} \quad \text{tels que} \quad z = x + iy;$$
$$y \in \mathrm{H} \Longleftrightarrow -y \in \mathrm{H} \quad \text{et} \quad z \in \Sigma \Longleftrightarrow \bar{z} = x - iy \in \Sigma, \quad \text{d'où} \quad \Sigma = \bar{\Sigma}.$$

Si Σ est un complexifié de $c(\mathrm{E})$ on a $\Sigma = \bar{\Sigma}$.

Réciproquement, soit Σ un sous-espace de $c(\mathrm{E})$ vérifiant l'égalité

$$\Sigma = \bar{\Sigma},$$

qui entraîne $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = \Sigma$ et, d'après la question 2°, *a*, $\Sigma = c(\Sigma \cap \mathrm{E})$; Σ est donc un complexifié.

Conclusion. — Pour qu'un sous-espace Σ de $c(\mathrm{E})$ soit un complexifié, il faut et il suffit que Σ soit égal à son conjugué $\bar{\Sigma}$.

3° Sous-espace de $c(\mathrm{E})$ irréels.

a) Dimension de $l(\Sigma)$. — Si Σ est irréel on a l'équivalence suivante :

$$\Sigma \text{ irréel} \Longleftrightarrow \Sigma \cap \mathrm{E} = \{0\} = c[\{0\}];$$

On a aussi, d'après la question 2°, *a*, $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = \{0\}$.

L'égalité $\Sigma + \bar{\Sigma} = c[l(\Sigma)]$, établie à la question 2°, *b*, donne une somme directe pour $c[l(\Sigma)]$,

$$\Sigma \oplus \bar{\Sigma} = c[l(\Sigma)],$$

puisque $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = \{0\}$.

Or, on sait que, en général,

$$\Sigma + \bar{\Sigma} = c[l(\Sigma)] \Longleftrightarrow \dim \Sigma + \dim \bar{\Sigma} = \dim c[l(\Sigma)] + \dim (\Sigma \cap \bar{\Sigma})$$

et

$$\Sigma \oplus \bar{\Sigma} = c[l(\Sigma)] \Longleftrightarrow \dim \Sigma + \dim \bar{\Sigma} = \dim c[l(\Sigma)];$$

Pour que Σ soit irréel il faut et il suffit que

$$\dim \Sigma + \dim \bar{\Sigma} = \dim c[l(\Sigma)],$$

mais

$$\Sigma \cap \bar{\Sigma} = 0 \Longrightarrow \dim \Sigma = \dim \bar{\Sigma},$$

la condition s'écrit alors $2 \dim_{\mathbb{C}} \Sigma = \dim_{\mathbb{R}} [l(\Sigma)]$.

b) Établissons la formule $\dim l(\Sigma) = 2 \dim \Sigma - \dim (\Sigma \cap \bar{\Sigma})$. — On a déjà vu que, pout tout Σ on a

$$\dim \Sigma + \dim \bar{\Sigma} = \dim c[l(\Sigma)] + \dim (\Sigma \cap \bar{\Sigma}).$$

4° Étude des sous-espaces Σ irréels.

a) Étude des applications $z \longmapsto \mathfrak{R}(z)$ et $z \longmapsto \mathfrak{I}(z)$ de z dans $l(\Sigma)$. — L'application $z \longmapsto \mathfrak{R}(z)$ se définit ainsi : x et y étant des réels appartenant à $l(\Sigma)$, on considère le complexe $z = x + iy$, $\mathfrak{R}(z) = x$ et $\mathfrak{I}(z) = y$.

Tout $z = x + iy$ de Σ est l'image d'un élément x dans l'application $z \longmapsto \mathfrak{I}(z)$, donc l'image d'un élément de $l(\Sigma)$ dans l'application $z \longmapsto \mathfrak{R}(z)$; cette application est surjective ainsi que $z \longmapsto \mathfrak{I}(z)$. Soit $z_0 = x_0 + iy_0$ donné, cherchons tous les z, tels que $z = x + iy$, vérifiant $\mathfrak{R}(z) = \mathfrak{R}(z_0)$; on a $x = x_0$ et $y = y_0 + \lambda$ (λ, réel quelconque), $z = z_0 + i\lambda$; si λ est différent de zéro, on a un vecteur $z - z_0 \neq 0$ irréel appartenant à $l(\Sigma) \in \mathrm{E}$, ce qui est impossible:

λ est sûrement nul, la seule solution de $\mathfrak{R}(z) = \mathfrak{R}(z_0)$ est $z = z_0$, l'application $z \longmapsto \mathfrak{R}(z)$ et l'application $z \longmapsto \mathfrak{I}(z)$ sont *injectives*, donc *bijectives*.

Le raisonnement montre que, si l'application $x \longmapsto \mathfrak{R}(z)$ est injective, $\Sigma \cap \mathrm{E} = \{0\}$, donc Σ est irréel.

Puisque $\mathfrak{R}(\Sigma) = l(\Sigma) = \mathfrak{I}(\Sigma)$, la propriété de $z \longmapsto \mathfrak{R}(z)$ est aussi la propriété de $z \longmapsto \mathfrak{I}(z)$.

b) Base de Σ irréel. — Soit $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ une base d'un sous-espace irréel Σ,

$$[\mathfrak{R}(z_1),\ \mathfrak{R}(z_2),\ \ldots,\ \mathfrak{R}(z_q),\ \mathfrak{I}(z_1),\ \mathfrak{I}(z_2),\ \ldots,\ \mathfrak{I}(z_q)] \in l(\Sigma),$$

Σ étant irréel, on a $\dim l(\Sigma) = 2 \dim \Sigma = 2q$.

On a vu, à la question 4°, *a*, que $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ étant un système libre de $c(\mathrm{E})$ entraîne que $\mathfrak{R}(z_1), \mathfrak{R}(z_2), \ldots, \mathfrak{R}(z_q)$ et $\mathfrak{I}(z_1), \mathfrak{I}(z_2), \ldots, \mathfrak{I}(z_q)$ sont des systèmes libres de E.

Supposons que pour $p \in 1, 2, \ldots, q$, on puisse déterminer $\lambda_{p,k} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathfrak{I}(z_p) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_{p,k} \mathfrak{R}(z_k)$$

et

$$z_p = \mathfrak{R}(z_p) + \sum_{k=1}^{q} \lambda_{p,k} \mathfrak{R}(z_k) = (1 + \lambda_{p,p}) \mathfrak{R}(z_p) + \sum_{k=1}^{q} \lambda_{p,k} \mathfrak{R}(z_k), \qquad \text{avec} \qquad k \neq p,$$
$$\mathfrak{R}(z_k) \in \Sigma \Longrightarrow z_p \in \mathrm{E} \Longrightarrow z_p \in \Sigma \cap \mathrm{E} = [0], \qquad z_p = 0,$$

le système $\mathfrak{R}(z_1), \ldots, \mathfrak{R}(z_q), \mathfrak{I}(z_1), \ldots, \mathfrak{I}(z_q)$ est donc un système libre de E et constitue une base d'un sous-espace Σ de E de dimension $2q < n = \dim \mathrm{E}$.

La réciproque est immédiate.

c) Construction des sous-espaces Σ irréels de $c(\mathrm{E})$ par le procédé donné. — Prenons un sous-espace H de E, de dimension paire $2q$, engendré par les vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_{2q}, 0, 0, \ldots, 0)$ de E dans une base donnée. Considérons l'automorphisme $\sigma(\mathrm{H})$ tel que

$$[\sigma(\mathrm{H})]^2 = -\mathrm{I}$$

et le sous-espace Σ défini par $x \in \Sigma \Longleftrightarrow x \in H$ et $z = x + i\sigma(x)$, σ étant un automorphisme de H de carré -1.

Σ est un sous-espace vectoriel $c(E)$ et Σ est irréel, car

$$z = x + i\sigma(x) \in \Sigma \cap E \Longrightarrow \sigma(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow z = 0.$$

Réciproquement, soit Σ un sous-espace, irréel, de $c(E)$, $z \longmapsto \mathfrak{R}(z)$ est une application injective de Σ dans $l(\Sigma)$, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{J}$ sont deux isomorphismes de Σ dans $l(\Sigma)$, $\mathfrak{J} \circ \mathfrak{R}^{-1}$ est un automorphisme de $l(\Sigma)$ dans $l(\Sigma)$, qui à tout x de $l(\Sigma)$ associe l'élément unique y de $l(\Sigma)$ tel que

$$\mathfrak{R}(x + iy) = x \left[x \in l(\Sigma) \xrightarrow{\mathfrak{R}^{-1}} x + iy \in \Sigma \xrightarrow{\mathfrak{J}} y \in l(\Sigma)\right].$$

Si l'on note σ cet automorphisme, tout élément de Σ s'écrit $z = x + i\sigma(x)$, d'où

$$z = x + iy \Longrightarrow -iz = y - ix \quad \text{et} \quad y = \sigma(x) \Longrightarrow \sigma(y) = -x;$$
$$\sigma[\sigma(x)] = -x \quad \text{et} \quad \sigma^2 = -I \text{ (le carré de } \sigma \text{ est égal à } -1).$$

5° *a*) **Pas d'automorphisme σ, $\sigma^2 = -1$, si $\dim H = 2q + 1$.** — Soit un espace réel H de dimension impaire et l'automorphisme σ défini par la matrice carrée M à $2q + 1$ lignes et colonnes. Soit D le déterminant de M. L'égalité $\sigma^2 = -1$ se traduit par $D^2 = \det[-I] = (-1)^{2q+1} = -1$, or D est à éléments réels et $D^2 \geqslant 0$; il n'existe donc pas d'automorphisme σ de carré $\sigma^2 = -1$.

b) **Matrice Ω représentant σ.** — La base de l'espace H de dimension $2p$ étant l'ensemble des vecteurs colonnes $v_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ e_{jk} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, où $e_{jk} = 1$ si $j - k = p$, $e_{jk} = -1$ si $k - j = p$ et $e_{jk} = 0$ si $|j - k| \neq |p|$.

La matrice Ω représentant σ est

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & \cdots\cdots & & -1 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots\cdots & & 0 \end{bmatrix}.$$

On a bien

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & -1 \end{bmatrix} = -I \quad \text{et} \quad \sigma^2 = -1.$$

II. — 1° **Endomorphisme de $c(E)$, $\varphi = f' + ig'$.** — Cherchons f et g vérifiant $f' + g' = \varphi$ donné. Soit

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \varphi(z) = \varphi(x + iy) = f(x) + if(y) + i[g(x) + ig(y)]$$
$$\Longleftrightarrow \varphi(z) = f(x) - g(y) + i[f(y) + g(x)] \Longleftrightarrow \varphi(x) + i\varphi(y) = \mathfrak{R}\varphi(z) + i\mathfrak{J}\varphi(z)$$
$$\Longleftrightarrow f(x) - g(x) = \mathfrak{R}\varphi(z) \quad \text{et} \quad f(y) + g(x) = \mathfrak{J}\varphi(z);$$

si $y = x$ on a

$$z = x + ix \quad \text{et} \quad f(x) - g(x) = \mathfrak{R}\varphi(z_0), \quad f(x) + g(x) = \mathfrak{J}\varphi(z_0),$$

d'où

$$2f(x) = \mathfrak{R}\varphi(z_0) + \mathfrak{J}\varphi(z_0) \quad \text{et} \quad 2g(x) = \mathfrak{J}\varphi(z_0) - \mathfrak{R}\varphi(z_0),$$

$f(x)$ et $g(x)$ sont définis de façon unique à partir de φ.

2° **Ensemble $\mathcal{L}$ des endomorphismes φ de $c(E)$.** — *a*) **Propriétés équivalentes.**

$$\varphi \in \mathcal{L}; \quad \varphi(E) = (i\varphi)(E)\,; \quad \varphi(E) = \varphi[c(E)]; \quad l(\operatorname{Ker} \varphi) = E,$$

avec $\operatorname{Ker} \varphi$ = noyau de φ.

On a

$$(P_1): \quad \varphi \in \mathcal{L} \Longrightarrow \varphi(E) = \Sigma, \quad \text{sous-espace de } c(E), \quad \forall z \in \Sigma \quad \text{et} \quad iz \in \Sigma$$
$$\Longrightarrow \varphi(E) = (i\varphi)(E),$$

donc $(P_1) \Longrightarrow (P_2)$.

On a

$$(P_2): \quad \varphi(E) = (i\varphi)(E) \Longrightarrow \varphi(E) \text{ sous-espace réel.}$$
$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \varphi(x + iy) = \varphi(x) + i\varphi(y),$$

puisque φ est un endomorphisme de $c(E)$;

et

$$\left.\begin{aligned} x \in E &\Longrightarrow \varphi(x) \in E \\ y \in E &\Longrightarrow i\varphi(y) \in i\varphi(E) = \varphi(E) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \varphi(z) \in \varphi(E) \Longrightarrow \varphi[c(E)] \subset \varphi(E);$$

Or,

$$E \subset c(E) \Longrightarrow \varphi(E) \subset \varphi[c(E)]$$

donc

$$\varphi(E) = \varphi[c(E)]$$

et l'on a

$$(P_2) \Longrightarrow (P_3).$$

On a

$$(P_3): \quad \varphi(E) = \varphi[c(E)] \Longrightarrow \forall x \in E, \quad \forall y \in E \quad \text{et} \quad \forall z = x + iy \quad \text{on a} \quad \varphi(z) = f(x) + ig(y).$$
$$f(x) = \varphi(x) \in E \quad \text{et} \quad g(y) = -\varphi(iy) \in E \quad \text{donc} \quad \varphi(z) \in c(E);$$

puisque

$$\varphi[c(E)] = \varphi(E), \quad \text{on a} \quad \varphi(x) \in \varphi(E) \subset c(E).$$

L'image de E est donc un sous-espace de $c(E)$: $\varphi \in L$.

On a donc

$$(P_3) \Longrightarrow (P_1), \quad \text{donc enfin} \quad (P_1) \Longleftrightarrow (P_2) \Longleftrightarrow (P_3).$$

Noyau de φ [Ker(φ)]; $\varphi \in \mathcal{L}$. — Si $x \in E, y \in E$ et $z = x + iy \subset c(E)$, $\varphi(z) = f(x) + ig(y)$.

$$z \in \operatorname{Ker} \varphi \Longleftrightarrow f(x) = 0, \quad g(y) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \exists x \in \operatorname{Ker} f \subset l(\operatorname{Ker} \varphi) \quad \text{et} \quad \exists y \in l(\operatorname{Ker} \varphi).$$
$$(P_2): \quad \varphi(E) = i\varphi(E) \Longleftrightarrow \forall x \in E, \quad \exists y \in E, \quad \varphi(x) = i\varphi(y)$$
$$\Longrightarrow \varphi(x - iy) = 0 \Longrightarrow \forall x \in E, \quad \exists z = x - iy \in \operatorname{Ker} \varphi(z).$$

Si

$$x \in \mathcal{R}(\operatorname{Ker} \varphi) = l(\operatorname{Ker} \varphi) \Longrightarrow E \subset l(\operatorname{Ker} \varphi),$$

mais on a toujours

$$l(\operatorname{Ker} \varphi) \subset E, \quad \text{donc} \quad l(\operatorname{Ker} \varphi) = E.$$

Donc on a $(P_2) \Longrightarrow (P_4)$.

On a

$$(P_4): \quad l(\operatorname{Ker} \varphi) = E \Longleftrightarrow \forall x \in E, \quad \exists y \in E, \quad \varphi(x + iy) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = i\varphi(-y) \Longrightarrow \varphi(iy) = (i\varphi)(E),$$

donc

$$(P_4) \Longrightarrow (P_2).$$

Finalement

$$(P_1) \Longleftrightarrow (P_2) \Longleftrightarrow (P_3) \Longleftrightarrow (P_4).$$

b) Rang de φ appartenant $\mathcal{L}(\varphi)$. — Pour tout endomorphisme φ de $c(E)$ on a

$$\operatorname{rang} \varphi = \dim c(E) - \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Ker} \varphi \Longleftrightarrow 2 \operatorname{rang} \varphi = 2 \dim_{\mathbf{R}} E - 2 \dim \operatorname{Ker} \varphi,$$

Or, d'après la question I, 3°, *b*, on a, d'une part,

$$2 \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Ker} \varphi = \dim_{\mathbf{R}} l(\operatorname{Ker} \varphi) + \dim_{\mathbf{C}} (\operatorname{Ker} \varphi \cap \overline{\operatorname{Ker} \varphi})$$

et, d'autre part,

$$\varphi(z) = f'(z) + ig'(z) = f'(x + iy) + ig'(x + iy) = f(x) + if(y) - g(y) + ig(x),$$
$$\varphi(z) = f(x) - g(y) + i[f(y) + g(x)] \Longrightarrow z = x + iy \in \operatorname{Ker} \varphi, \quad \text{si} \quad f(x) - g(y) = 0, \quad \text{on a} \quad f(y) + g(x) = 0,$$
$$\varphi(\bar{z}) = f(x) + g(y) - i[g(x) - f(y)] \Longrightarrow z = x + iy \in \overline{\operatorname{Ker} \varphi}, \quad \text{si} \quad f(x) + g(y) = 0, \quad \text{on a} \quad g(x) - f(y) = 0.$$
$$z \in \operatorname{Ker} \varphi \cap \overline{\operatorname{Ker} \varphi} \Longleftrightarrow f(x) - g(y) = 0, \quad f(x) + g(y) = 0, \quad f(y) + g(x) = 0, \quad g(x) - f(y) = 0$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = 0, \quad g(x) = 0, \quad f(y) = 0, \quad g(y) = 0$$
$$\Longleftrightarrow x \in (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) \quad \text{et} \quad y \in (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g);$$

donc

$$\dim_{\mathbf{C}} (\operatorname{Ker} \varphi \cap \overline{\operatorname{Ker} \varphi}) = \dim_{\mathbf{R}} (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

On a donc

$$2 \operatorname{rang} \varphi = 2 \dim_{\mathbf{R}} E - \dim_{\mathbf{R}} E - \dim_{\mathbf{R}} (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)$$
$$= \dim_{\mathbf{R}} E - \dim_{\mathbf{R}} (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

3° Étude de $\mathcal{L}_0(\varphi)$, partie de $\mathcal{L}(\varphi)$: $\varphi \in \mathcal{L}_0 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi$ irréel.

a) Cas où $\dim E = n = 2n' + 1$. — La formule $\dim_{\mathbf{R}} (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = \dim E - 2 \operatorname{rang} \varphi$, si $\operatorname{Ker} \varphi$ est irréel, ce qui entraîne $\operatorname{Ker} \varphi \cap \overline{\operatorname{Ker} \varphi} = [0]$ et $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = [0]$, devient

$$\dim E = 2 \operatorname{rang} \varphi, \quad \dim E = 2q$$

ce qui est incompatible avec $\dim E = 2n' + 1$.

$L_0(\varphi)$ est vide si la dimension de E est impaire.

b) Si $\varphi = f' + ig'$ appartient à $\mathcal{L}_0$, alors $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.

$$\operatorname{Ker} \varphi \text{ irréel} \Longrightarrow 2 \dim \operatorname{Ker} \varphi \leqslant \dim E \text{ (d'après la question I, 4°, } b)$$
$$\Longrightarrow 2 \operatorname{rang} \varphi = \dim E - \dim (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) \geqslant \dim E$$
$$\Longrightarrow \dim (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) \leqslant 0 \Longrightarrow \dim (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = 0$$
$$\Longrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}.$$

Si $\varphi = f' + ig'$ appartient à $\mathcal{L}_0$, alors il existe un automorphisme σ de E. — On a vu (question I, 4°, *c*) en faisant $H = E$, que si $\operatorname{Ker} \varphi$ est irréel, il existe un automorphisme de E, σ, de carré $\sigma^2 = -1$, tel que

$$z = x + i\sigma(x) \in \operatorname{Ker} \varphi \Longleftrightarrow f'[x + i\sigma(x)] + ig'[x + i\sigma(x)] = 0$$
$$\Longleftrightarrow (f - g \circ \sigma)(x) = 0, \quad (g + f \circ \sigma)(x) = 0$$
$$\Longleftrightarrow g \circ \sigma = f \quad \text{et} \quad -f \circ \sigma = g.$$

c) Endomorphismes f et g de E, tels que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = 0$. — S'il existe un endomorphisme τ de E, tel que $f = g \circ \tau$ et $g = -f \circ \tau$, l'endomorphisme de $c(E)$, $\varphi = f' + ig'$ a son noyau $\operatorname{Ker} \varphi$ défini par

$$z = x + i\tau(x) \in \operatorname{Ker} \varphi \Longrightarrow (f - g \circ \tau)(x) = 0 \quad \text{et} \quad (g + f \circ \tau)(x) = 0$$
$$\Longrightarrow \forall x \in E; \quad x \in \operatorname{Ker} \varphi$$
$$\Longrightarrow l(\operatorname{Ker} \varphi) = E \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{L}(\varphi).$$
$$\varphi(x) = f(x) + ig(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{et} \quad g(x) = 0 \Longrightarrow x \in \operatorname{Ker} f, \quad x \in \operatorname{Ker} g$$
$$\Longrightarrow x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\} \Longrightarrow x = \{0\}.$$
$$\operatorname{Ker} \varphi \cap E = \{0\} \Longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi \text{ irréel}, \varphi \in \mathcal{L}_0.$$

Unicité de τ. — On a

$$\left.\begin{aligned} f = g\circ\tau = g\circ\tau' &\Longrightarrow \tau-\tau'\in \operatorname{Ker} g \\ g = -f\circ\tau = -f\circ\tau' &\Longrightarrow \tau-\tau'\in \operatorname{Ker} f \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (\tau-\tau')(x)\in \operatorname{Ker} f\cap \operatorname{Ker} g = \{0\},$$

et

donc

$$\tau = \tau' \Longrightarrow \tau = \sigma \quad \text{et} \quad \tau^2 = -1.$$
$$z = x + i\tau(x)\in \operatorname{Ker}\varphi.$$

4° **Étude de (T):** $g\circ\tau = f$ **et** $f\circ\tau = -g$.

a) **(T) admet une solution si** $\varphi\in\mathcal{L}$. — On a montré, à la question II, 3°, *c*, que si (T) a une solution τ, $\varphi\in\mathcal{L}$.

Réciproquement, si $\varphi\in\mathcal{L}$, on sait que $\varphi(E) = i\varphi(E)$, donc

$$\forall x\in E,\ \exists y\in E:\ \varphi(x) = i\varphi(y) \quad \text{et} \quad f(x) + ig(x) = if(y) - g(y).$$
$$\{\forall x\in E,\quad \exists y\in E:\ f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad g(y) = -f(x).$$

L'application $x\overset{\tau}{\longmapsto} y$ vérifiant $f(y) = g(x)$ et $g(y) = f(x)$ est surjective, soit

$$\begin{aligned} y = \tau(x) \quad \text{et} \quad y_1 = \tau(x_1) &\Longleftrightarrow f(y_1) = g(x_1) \quad \text{et} \quad g(y_1) = -f(x_1), \\ y_2 = \tau(x_2) &\Longleftrightarrow f(y_2) = g(x_2) \quad \text{et} \quad g(y_2) = -f(x_2), \\ y_1 + y_2 = \tau(x_1) + \tau(x_2) &\Longrightarrow f(y_1) + f(y_2) = g(x_1) + g(x_2) \quad \text{et} \quad g(y_1) + g(y_2) = -f(x_1) - f(x_2) \\ &\Longrightarrow f(y_1+y_2) = g(x_1+x_2) \quad \text{et} \quad g(y_1+y_2) = -f(x_1+x_2) \\ &\Longrightarrow y_1 + y_2 = \tau(x_1+x_2) \\ &\Longrightarrow \tau(x_1+x_2) = \tau(x_1) + \tau(x_2); \end{aligned}$$

τ est un endomorphisme de E « pour que $\varphi = f' + ig'$ de $c(E)$ étant donné, le système (T) en τ **ait au moins une solution il faut, et il suffit que** φ **appartienne à** $\mathcal{L}$: $\varphi\in\mathcal{L}$ ».

b) $\varphi\in\mathcal{L}_0$. **Si (T) a une solution unique en** τ, **elle en a, au moins une.** — Comme on vient de le voir à la question 4°, *a*, $\varphi\in\mathcal{L}_0$; si $\varphi\in\mathcal{L}$ et $\operatorname{Ker}\varphi$ irréel, $\varphi\in\mathcal{L}_0$ et d'après la question 3°, *c* la solution τ de (T) est unique et de carré -1.

Si $\varphi\in\mathcal{L}$ et $\varphi\in\mathcal{L}_0$, (T) n'a pas une solution unique, puisque, dans la question 3°, *c* on a montré que si la solution était unique $\operatorname{Ker}\varphi$ serait irréel et φ appartiendrait à $\mathcal{L}_0$.

En définitive, « Pour que (T) ait une solution unique en τ, il faut et il suffit que φ appartienne à $\mathcal{L}_0$ (ou $\varphi\in\mathcal{L}$ et φ irréel) ».

Cas où $\dim E = 2p$: **une solution de (T) est un automorphisme de carré** -1. — Par hypothèse $\varphi\in\mathcal{L}$, ou bien $\varphi\in\mathcal{L}_0$ ou bien $\varphi\in\mathcal{L}$ avec $\varphi\in\mathcal{L}_0$.

α) Si $\varphi\in\mathcal{L}_0$, il a été établi à la question 4°, *b* que le système (T) a une solution unique τ de carré -1.

β) Si $\varphi\in\mathcal{L}$ et $\varphi\notin\mathcal{L}_0$ et si $\dim E = 2p$ (p entier positif), on a, d'après la question II, 1°, *b*,

$$2\operatorname{rang}\varphi = 2p - \dim(\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g),$$

d'où

$$\dim(\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g) = 2q.$$

On peut alors déterminer un automorphisme τ_1, de carré -1, de $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g$ vérifiant (pour $\varphi = f' + ig'$)

$$\forall x\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g,\quad g\circ\tau_1(x) = 0 = f(x) \quad \text{et} \quad f\circ\tau_1(x) = 0 = -g(x).$$

Soit, d'autre part, un sous-espace irréel Σ de $c(E)$ tel que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g) + \Sigma$, Σ étant le supplémentaire de $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g$ dans $\operatorname{Ker}\varphi$.

Dans $l(\Sigma)$, on a τ_2, unique solution de (T), avec $\tau_2^2 = -1$. Si l'on considère l'endomorphisme τ défini par

$$x\in E,\quad x = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad x_1\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g,$$

x_1 unique et x_2 unique appartenant à $l(\Sigma)$, τ est une solution de (T) vérifiant les relations suivantes :

$$\tau^2 = -I \quad \text{et} \quad \tau_1'\circ\tau_2' = \tau_2\circ\tau_1 = 0.$$

III. — Espace vectoriel euclidien de dimension n, **prolongé à** $c(E)$; **produit scalaire** $zz' = (x+iy)(x'+iy')$; **vecteur isotrope** $z^2 = 0$; **sous-espace isotrope de** $c(E)$: $z\in\text{SETI} \Longleftrightarrow z^2 = 0$.

1° *a*) **Un système orthonormé des** $2q$ **vecteurs de** E, $u_1, u_2, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_q$ **étant donné,**

$$u_1 + iv_1,\ \ldots,\ u_q + iv_q$$

engendre un SETI de dimension q. — Par définition, u_hu_k, v_hv_k, u_hv_k et u_kv_h sont orthogonaux si $h\neq k$. Les produits scalaires $u_h.u_k, \ldots$, sont nuls et les carrés scalaires sont égaux

$$u_k^2 = \cdots = v_k^2.$$

Soit

$$w_k = u_k + iv_k, \qquad w_h = u_h + iv_h;$$

on a alors

$$w_h.w_k = u_hu_k - v_h.v_k + i(u_hv_k + u_kv_h) = 0$$

et

$$w_h^2 = u_h^2 - v_h^2 + 2iu_hv_h = 0.$$

w_h est isotrope. Le système $w_1, w_2, \ldots, w_q$ est normé, puisque le système $u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_q$ est orthonormé; le système est libre et constitue une base de G. Les q vecteurs $w_1, \ldots, w_q$ forment une base du sous-espace irréel SETI de $c(E)$ qu'ils engendrent.

b) **Existence d'une structure euclidienne pour laquelle** Σ_0 **soit un SETI.** — Soit E_0 un espace réel et Σ_0 un sous-espace irréel de son complexifié. Soit $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_p$, avec $p\leqslant q$, les $2p$ vecteurs libres de E_0 tels que $u_1 + iv_1, \ldots, u_p + iv_p$ soit une base de Σ_0. On définit alors sur E une structure euclidienne telle que $u_1, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_p$ soit un système orthogonal (question 1°, *a*); Σ_0 est un SETI.

2° **Endomorphisme τ d'un espace euclidien.**

a) **Étude des propriétés de τ : (α) τ est orthogonal; (β) $\tau^2 = -1$; (γ) $\forall x \quad x.\tau(x) = 0$.**

(α) τ orthogonal $\Longleftrightarrow \tau(x).\tau(y) = x.y, \; \forall x$ et $\forall y$.

(β) $(\tau \circ \tau)(x) = -x$.

Des relations α) et β) on déduit

$$\tau^{-1} \circ \tau \circ \tau = -\tau^{-1} \Longleftrightarrow \tau = -\tau^{-1}, \qquad \tau^{-1} = -\tau = {}^t\tau,$$

d'où

$$x.\tau(x) = \tau^{-1}(x).\tau^{-1}[E(x)] = -\tau(x).x \Longrightarrow x.\tau(x) = 0.$$

$$(\alpha) \quad \text{et} \quad (\beta) \Longrightarrow (\gamma).$$

On suppose (α), τ *est orthogonal*, et (γ), $\forall x, \; x.\tau(x) = 0$, vraies puisque τ est orthogonal $\tau^{-1}(x).x = 0$, d'où l'on tire

$$x[\tau(x) + \tau^{-1}(x)] = 0, \qquad \forall x \Longrightarrow \tau^{-1}(x) = -\tau(x) \Longrightarrow \tau^2 = -1.$$

$$(\alpha) \quad \text{et} \quad (\gamma) \Longrightarrow (\beta).$$

Des deux relations (β), $\tau^2 = -1$, et (γ), $\forall x, \; x.\tau(x) = 0$, on déduit

$$[\tau(x) + y].[\tau[\tau(x) + y]] = 0 \Longleftrightarrow [\tau(x) + y][-x + \tau(y)] = 0$$
$$\Longrightarrow \tau(x).\tau(y) = x.y, \qquad \forall x, y.$$

(β) et (γ) entraînent (α), τ **orthogonal:**

Deux des propriétés (α), (β) ou (γ) de τ impliquent la troisième.

b) **Sous-espace irréel Σ de c(E).** — Si l'automorphisme σ associé à Σ est **orthogonal**, on a

$$\forall x \in c(E), \qquad [x + i\sigma(x)]^2 = x^2 - \sigma^2(x) + 2ix.\sigma(x) = 2ix\sigma(x) = 0;$$

Σ est un SETI.

Réciproquement, si Σ est un SETI, on a

$$\forall x \in l(\Sigma), \qquad [x + i\sigma(x)]^2 = 0 = 2ix.\sigma(x),$$

donc la restriction de σ à $l(\Sigma)$ est orthogonale; comme Σ est irréel on a $l(\Sigma) = E$, σ **est orthogonal.**

Conclusion. — Σ, sous-espace irréel de c(E), est un SETI si, et seulement si, σ **est orthogonal.**

c) **Automorphisme orthogonal σ de carré -1 d'un espace euclidien.** — Soit H un espace vectoriel euclidien de dimension $2p$ sur R, σ un endomorphisme orthogonal de carré -1 de H, Σ le sous-espace vectoriel irréel de c(E) associé à H et Σ par le procédé (P) (question de I, 4°, *c*).

(α) Σ est un SETI.

(β) Le système des p vecteurs de H; $y_1, y_2, \ldots, y_p$, étant orthonormé, on obtient une base orthogonale de Σ en prenant $z_1, z_2, \ldots, z_p$ définis par $z_k = y_k + \sigma(y_k)$. Le système $[y_1, y_2, \ldots, y_p, \sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_p)]$ est une base de H que nous notons B.

σ vérifie les propriétés (α) et (β) (question III, 2°, *a*), donc

$$\forall k, \qquad y_k.\sigma(y_k) = 0,$$

σ vérifie aussi

$$\forall h, k, \qquad k \neq h, \qquad z_h.z_k = y_h.y_k - \sigma(y_h).\sigma(y_k) + i[y_h\sigma(y_k) + y_k\sigma(y_h)] = 0$$

et

$$y_k.\sigma(y_k) = -y_k.\sigma(y_h) = 0.$$

B est orthonormé et, dans cette base σ, est représentée par la matrice Ω définie à la question I, 5°, *b*.

3° **Base normale d'un SETI.**

a) **Tout SETI admet au moins une base normale.** — $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ de c(E) est dit **normale** lorsque

$$\mathcal{R}(z_1), \ldots, \mathcal{R}(z_q), \qquad \mathcal{I}(z_1), \ldots, \mathcal{I}(z_q)$$

est un système orthonormé de (E). Comme on l'a vu (question III, 1°, *a*) c'est une base normale d'un SETI.

Réciproquement, tout SETI admet une base normale construite en considérant l'espace vectoriel euclidien H et l'endomorphisme orthogonal de carré -1 associé à Σ et H et en utilisant le procédé (P) employé à la question 2°, *c*.

b) **Complément en une base d'un système normal de SETI.** — Soit un système normal $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ d'un SETI, Σ; $\dim \Sigma = p > q$ défini par

$$z_k = x_k + i\sigma(x_k), \qquad x_k \in H,$$

H étant l'espace vectoriel associé à Σ et σ l'endomorphisme orthogonal de carré -1 associés à Σ et à H.

A partir du système normal $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, on forme le système orthonormé de $H(y_1, \ldots, y_p)$ tel que $[y_1, y_2, \ldots, y_p, \sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_p)]$ soit une base orthonormée de H, avec $y_k = x_k \, (k = 1, 2, \ldots, q)$, donc une base normale de Σ.

4° **Étude des SETI lorsque** $\dim E = 2p$ **ou** $\dim E = 2p + 1$.

a) **Tout SETI est inclus dans un SETI de dimension p.** — Soit un SETI, Σ_q, de dimension $\dim \Sigma_q = q$, avec $\dim E = 2p$ ou $\dim E = 2p + 1$, H_q est associé à Σ_q, σ_q est associé à H_q et Σ_q.

$x_1, x_2, \ldots, x_q, \sigma_q(x_1), \ldots, \sigma_q(x_q)$ est une base orthonormée de H_q. On peut considérer un sous-espace vectoriel H_q de E de dimension $2p$ et tel que $H_q \subset H_p$ (théorème de la base incomplète). De même on peut envisager une extension de σ_q à H_q, qui soit un endormophisme orthogonal de carré $-I_q$ (endomorphisme identique de H_p).

b) **Sous-espace totalement isotrope SETIM.** — La dimension de E étant $2p$ ou $2p + 1$, un SETI est maximal si sa dimension est p

$$2p \leq \dim E \leq 2p + 1 \Longrightarrow \dim \text{SETIM} = p$$

Supposons $\dim E = 2p$ et $\dim \text{SETIM} = p - 1$, pour un SETI donné, Σ_{p-1}, associé à H_{p-1} et σ_{p-1}. Soit G_{p-1} le sous-espace vectoriel de E orthogonal à H_{p-1} muni de la base orthonormée (g, g'). On construit deux SETIM distincts contenant Σ_{p-1} en prenant E et σ_{p_1} extension de σ_{p-1} à E définie par :

α) $\sigma_{p_1}(g) = g', \quad \sigma_{p_1}(g') = -g,$

β) $\sigma_{p_2}(g) = -g', \quad \sigma_{p_2}(g') = g.$

Si Σ_{p_1} et Σ_{p_2} étaient égaux, il en résulterait que $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, $\exists c \in \mathbb{R}$ et $\exists d \in \mathbb{R}$:

$$(a + bi)(ig + ig') = (c + di)(ig - ig'), \qquad \text{d'où} \qquad a = c = -c = 0 \text{ et } b = d = -d = 0,$$

le seul vecteur commun à $\Sigma_{p_1} - \Sigma_{p-1}$ et $\Sigma_{p_2} - \Sigma_{p-1}$ serait donc $[0]$ contrairement à l'hypothèse. Soit, d'autre part, une base orthonormée (g_0, g_0') de G_{p-1} ; le SETIM construit en posant $g_0' = \sigma_{p'}(g_0)$ sera un vecteur unitaire perpendiculaire à g_0, donc g_0 ou $-g_0'$ et σ_p' sera sur σ_{p_1} ou σ_{p_2}. Le SETIM construit est Σ_{p_1} ou Σ_{p_2}.

5° E est de dimension $2p$ et orienté.

a) **Automorphisme direct de E.** — Soit un automorphisme orthogonal σ de carré -1 sur E. Comme on l'a vu à la question 2°, *c*, dans une base convenable, σ est représenté par une matrice Ω. Toute base sur laquelle σ est représentée par une matrice Ω est de la forme

$$[x_1, x_2, \ldots, x_p, \sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_p)];$$

si l'on permute les vecteurs x_h et x_k ainsi que $\sigma(x_h)$ et $\sigma(x_k)$ les bases initiale et finale ont la même orientation, puisque le nombre de permutations est pair : tout automorphisme orthogonal σ_p de carré -1 est direct.

b) **Bases d'un automorphisme orthogonal σ de carré -1 de E représenté par la matrice Ω.** — Soit B et B′ deux telles bases

$$B : \; [x_1, \ldots, x_p, \sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_p)] \qquad \text{et} \qquad B' : \; [y_1, \ldots, y_p, \sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_p)].$$

Soit τ l'automorphisme de passage défini par

$$\tau(x_k) = y_k, \qquad \tau[\sigma(x_k)] = \sigma(y_k), \qquad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

τ est orthogonal, on a donc

$$\tau \circ \sigma(x_k) = \sigma(y_k) = \sigma \circ \tau(x_k), \qquad \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau,$$

τ est direct, d'après la question 5°, *a*, par suite, les bases sont de même sens.

c) **Base normale $(z_1, \ldots, z_p)$ du SETIM Σ et base orthonormée $\mathcal{R}(z_1), \ldots, \mathcal{R}(z_p), \mathfrak{I}(z_1), \ldots, \mathfrak{I}(z_p)$.** — Soit deux bases normales $(z_1, \ldots, z_p)$ et $(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ de Σ, considérons les bases de E définies par

$$[\mathcal{R}(z_1), \ldots, \mathcal{R}(z_p), \mathfrak{I}(z_1), \ldots, \mathfrak{I}(z_p)] \qquad \text{et} \qquad [\mathcal{R}(\zeta_1), \ldots, \mathcal{R}(\zeta_p), \mathfrak{I}(\zeta_1), \ldots, \mathfrak{I}(\zeta_p)].$$

Dans ces deux bases, l'automorphisme σ associé à Σ et à E a pour matrice Ω. Elles sont donc de même sens, qui est, par définition, le sens de Σ.

d) **Automorphisme orthogonal h de E, dont le prolongement h' à $c(E)$ transforme Σ en Σ' deux SETIM donnés.** — Étant donné les SETIM Σ et Σ', considérons les bases normales $B(z_1, \ldots, z_p)$ et $B'(z_1', \ldots, z_p')$ de Σ et Σ' associées aux bases orthonormées U et U′ de E définies par

$$U : \; [\mathcal{R}(z_1), \ldots, \mathcal{R}(z_p), \mathfrak{I}(z_1), \ldots, \mathfrak{I}(z_p)] \qquad \text{et} \qquad U' : \; [\mathcal{R}(z_1'), \ldots, \mathcal{R}(z_p'), \mathfrak{I}(z_1'), \ldots, \mathfrak{I}(z_p')].$$

Il existe un automorphisme h de E qui transforme $\mathcal{R}(z_k)$ en $\mathcal{R}(z_k')$ et $\mathfrak{I}(z_k)$ en $\mathfrak{I}(z_k')$ puisque U et U′ sont des bases de E ; cet automorphisme est orthogonal (U et U′ sont orthonormées) ; le prolongement h' de h à $c(E)$ par $h'(x + iy) = h(x) + ih(y)$ est un automorphisme de $c(E)$ qui transforme B en B′ donc Σ en Σ'.

e) **Sens de Σ et Σ'.** — Par construction h est direct si, et seulement si, Σ et Σ' sont de même sens. Un automorphisme h direct transforme un SETIM en un SETIM de même sens et réciproquement. La réciproque montre qu'un automorphisme indirect transforme un SETIM en un autre de sens contraire.

6° E est de dimension $2p$ (non orienté).

a) **Sous-espace propre du prolongement d'un automorphisme de carré -1 de E.** — Le prolongement d'un automorphisme τ de carré -1 de E est un automorphisme τ' de carré -1 [représenté dans $c(E)$ par la même matrice que τ dans E]. Les valeurs propres λ vérifient $\tau(z) = \lambda z$, $\lambda^2 z = -z$, $\lambda^2 = -1$, $\lambda = \pm i$. Soit Σ un SETIM quelconque muni de l'automorphisme σ, soit σ un automorphisme orthogonal de carré -1, τ admet Σ comme espace propre si

$$\tau[x + i\sigma(x)] = i[x + i\sigma(x)] = -ix + \sigma(x),$$
$$\tau(x) + i\tau \circ \sigma(x) = -\sigma(x) + ix = \sigma(x) - ix \Longrightarrow \forall x, \qquad \tau = \pm \sigma.$$

Il y a deux automorphismes τ : $\tau_1 = \sigma$ et $\tau_2 = -\sigma$.

b) **Endomorphisme $\varphi = f' + ig'$ de $c(E)$ associé à f et g.**

α) **Ker φ est un SETIM.** — Supposons les automorphismes f et g de E tels que $g^{-1} \circ f$ soit un automorphisme orthogonal de E de carré -1. Posons $g^{-1} \circ f = \tau$, on a alors

$$f = g \circ \tau \qquad \text{et} \qquad f \circ \tau = g \circ (-1) = -g,$$

d'où il résulte (question II, 3°, *c*) que

$$\varphi \in \mathcal{L} \Longrightarrow l(\operatorname{Ker} \varphi) = E(\dim 2p) \Longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \text{SETIM}.$$

Réciproquement, si $\operatorname{Ker} \varphi$ est un SETIM, il existe τ unique de carré -1, tel que

$$f = g \circ \tau, \qquad -g = f \circ \tau \Longrightarrow \tau = g^{-1} \circ f \Longrightarrow g^{-1} \circ f \quad \text{est orthogonal de carré } -1.$$

β) **$\varphi(E)$ est un SETIM.**

$$\varphi(E) = \text{SETIM} \Longleftrightarrow \forall x \in E, \exists \tau \text{ orthogonal, avec } \tau^2 = -1, \quad f(x) + ig(x) = f(x) + i\tau \circ f(x)$$
$$\Longleftrightarrow g = \tau \circ f \Longleftrightarrow g \circ f^{-1} = \tau, \quad \text{automorphisme orthogonal de carré } -1.$$